REMARQUES SUR *CATEGORY THEORY* D'AWODEY CHAPITRE 1.

DYLECH30TH

La théorie des catégories est une théorie qui traite[1] des fonctions sans interférer avec le genre spécifique des objets sur lesquels les fonctions opèrent, *id est.* C'est une théorie des *algèbres des fonctions*. Cette note sera écrite en français, mais les terminologies restent en anglais. Cette note destiné non seulement à[2] servir d'un[3] index concis du livre original, mais aussi à expliquer en détail[4] les exemples et les définitions qui ne sont pas assez claires. Mais si une définition ou un exemple est déjà claire, je préfèrerais se référer au livre.

Cependant, pour des termonologies qui n'ont pas rapport au sujet de cet article, comme les ensembles pointés ou les espace topologies, vous (s'il y a vraiment quelqu'un qui lit cet article) êtes encouragé à les explorer par vous-même.

1. Catégorie

Définition 1.1 (Category/Catégorie). *A **catégorie** $\mathcal{C}$ consiste en des suivants:*

- *Les objets: $A, B, C \in \mathcal{C}$, ...*
- *Pour chaque objets A et B, une collection (*n'est pas un ensemble!*) des **morphismes**, écrit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Si le context est clair, nous écrivons $A \to B$, et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ est abrégé en $f : A \to B$.*

Quand les morphismes sont sujets aux conditions suivantes:

1. *Pour chaque objet A, il y a un morphisme $1_A : A \to A$.*
2. *Pour chaque morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$, il y a un morphisme $g \circ f : A \to C$ en composant f et g tel que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.*
3. *La composition est associative, id est. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.*
4. *Les morphismes des identités sont équivalents à la composition près[5]. Soit $f : A \to B$, alors $f \circ 1_A = f$ et $1_B \circ f = f$.*

Exemple 1.2. *Tous les ensembles et les fonctions entre des ensembles sont une catégorie* **Sets**. *C'est facile à verifier que les ensembles forment des objets et les fonctions entre eux sont les morphismes qui satisfont les quatre conditions.*

Parfois, c'est préférable de comprendre les catégories en utilisant des certains exemples qui ne sont pas ce que nous appelons "concrets", *id est.* les catégories dont les objets ne sont pas des ensembles et leurs morphismes sont des fonctions entre des ensembles, car tout ce dont les catégories se soucient[6] sont les morphismes, au lieu de la façon dont les objets sont formés.

Exemple 1.3. *Soit* **Rel** *une catégorie dont les objets sont des ensembles, et ses morphismes sont les sous-ensembles de $A \times B$, alors l'identité d'un objet A est la relation d'identité $\{(a, a) \mid a \in A\}$, et c'est facile à verifier que cela est vraiment une catégorie.*

Date: 7/26/2023.

[1]*traiter de...* deals with
[2]*destiné à...* intended to...
[3]*servir de ...* serve as...
[4]*en détail* in detail
[5]*à ... près* up to...
[6]*se soucier de...* care about

Dans une catégorie, parfois il y aura des morphismes de circuit, par exemple $f : A \to B$ et $g : B \to A$, à ce moment, nous devons remarquer qu'à moins que[7] $f \circ g = 1_B$ ou $g \circ f = 1_A$, la composition de f et g produirai une infinité des morphismes $f \circ g$, $f \circ g \circ f \circ g$, ... *et cetera.* De telles catégories sans objets finis ou sans morphismes finis sont les *catégories infinies*.

Définition 1.4 (Functor/Foncteur). *Une* ***foncteur***

$$F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$$

entre ***C*** *et* ***D*** *est une application*[8] *des objets de* ***C*** *aux objets de* ***D*** *et des morphismes de* ***C*** *aux morphismes de* ***D*** *telle qu'il préserve les opérations sur* ***C*** *(comme la composition et l'identité), id est.* $F(f : A \to B) : F(A) \to F(B)$ *tel que:*

- $F(1_A) = 1_{F_A}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Pour comprendre pourquoi devons-nous avoir de telles conditions, examinons les diagrammes (ce diagramme est en fait illégal, ils devraient être intéressé dans la théorie des catégories supérieures, mais il nous aide à comprendre la façons dont ces conditions fonctionnent). Permettez-moi d'adapter certains concepts de la théorie des types. Supposons que nous ayons un constructeur des types $\to$ qui accepte deux arguments A et B pour former un type des fonctions $A \to B$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "F \times F"] \arrow[d, "\to"'] & F(A) \times F(B) \arrow[d, "\to"] \\
A \to B \arrow[r, "F"'] & F(A) \to F(B)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1

Qu'est-ce que ce signifie? Remarque que pour tous les $a, b \in$ **C**, Pour rendre le diagramme commutatif, nous avons:

$$\begin{tikzcd}
(A, B) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\to"'] & \bullet \arrow[d, dashed] \\
f : A \to B \arrow[r, "F"'] & F(f : A \to B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A, B) \arrow[r, "F \times F"] \arrow[d, dashed] & (F(A), F(B)) \arrow[d, "\to"] \\
\bullet \arrow[r, dashed] & F(A) \to F(B)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2

Ce diagramme sigifie effectivement que, pour rendre le diagramme commutatif, les deux chemins qui sont dessinés en des lignes continues dans les deux sous-figure doivent conduire au même résultat. *id est.*

$$F(f : A \to B) : F(A) \to F(B)$$

Des méthodes similaires pouvent s'utiliser pour démonterer $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

[7] *à moins que...* + *v.subj* unless...

[8] *application* mapping

Définition 1.5 (Monoid/Monoïde en termes de l'ensemble). *Un **monoïde** est une ensemble M avec une opération binaire associative* $\bullet : M \times M \to M$ *et un élément unitaire* $u \in M$ *tel que pour tout* $x \in M$

$$x \bullet u = u \bullet x = u$$

Nous pouvons reformuler la définition du monoïde en terms de la catégorie. Cet exemple sera extrêmement abstraire, car ses morphismes ne seront pas des fonctions. Nous devons comprendre que, quand bien même nous écrivons les morphismes tout comme ce que nous faisons pour les fonctions, mais tout ce que les morphismes doivent obéir sont les quatre conditions. Ils ne sont pas necessairement ont la forme des fonctions.

Définition 1.6 (Monoid/Monoïde en termes de la catégorie). *Un **monoïde** est une catégorie avec un seule objet M, ses morphismes sont les éléments de M.*

Remarque 1.7. *Nous pouvons examiner que la définition ci-dessus forme en effet*[9] *une catégorie, supposons que nous ayons un monoïde en terms de l'ensemble, alors nous considérons le seule objet est l'ensemble M, et les morphismes sont les éléments $m, n \in M$, la composition des morphismes est la opération de M, id est.* $\bullet : M \times M \to M$, *l'identité est l'élément unitaire $u \in M$. Rappelez-vous que non seulement les morphismes ne sont pas nécessairement les fonctions, mais aussi les fonctions n'ont pas nécessairement de relation avec l'objet. L'objet de cette catégorie peut être n'importe quoi*[10]*, et ses morphismes sont écrits en $M \to M$, même s'il paraît qu*[11]*'ils n'ont rien en commun*[12].

2. Isomorphisme

Définition 2.1 Isomorphisme, Isomorphe. *Un morphisme $f : A \to B$ dans une catégorie **C** est un **isomorphisme**, si et seulement s'il a des inverses à deux côtés. id est. Il y a un morphisme $f^{-1} = g : B \to A$ tel que:*

$$f \circ g = 1_B \quad \textit{and} \quad g \circ f = 1_A$$

*Deux objets A et B sont **isomorphes** s'il y a un isomorphic entre A et B, dénoté $A \cong B$.*

Définition 2.2 Groupoid/Groupoïde. *Un **groupoïde** est une catégorie dont les morphismes sont tous les isomorphismes.*

Définition 2.3 Groupe. *Un **groupe** est un groupoïde avec un seule objet.*

Cette définition devrait être claire une fois si vous connaissez la définition du groupe, soit $(G, \bullet)$ un groupe, clairement c'est un groupoïde avec un seule objet, à savoir l'ensemble de ce groupe G. Remarquons qu'un groupoïde est essentiellement un monoïde dont les morphismes sont tous les isomorphismes, *id est.* un monoïde que tous ses objets g ont un inverse g^{-1}. C'est exactement la définition du groupe.

Problème 2.4. *Les homomorphismes des groupes sont les homomorphismes des monoïdes, id est., il préserve:*

- *l'identité*
- *l'opération du monoïde*
- ***l'inverse***

[9]*en effet* indeed
[10]*n'importe quoi* anything
[11]*il paraît que...* it seems that...
[12]*en commun...* in

Proof. Nous avons seulement besoin de preuver le denière, car les deux premiers d'eux sont inclus dans la définition de l'homomorphisme du monoïde. Pour preuver le troisième, supposons que $(G, \bullet_G)$ et $(H, \bullet_H)$ sont deux groupes, et $f : G \to H$ est un homomorphisme entre G et H. Observons que pour chaque $g \in G$:

$$f(g^{-1}) \circ f(g) = f(g^{-1} \circ g) = f(1_G) = 1_H = f(g)^{-1} \circ f(g)$$

Alors par cancellation, nous avons

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

□

3. Construction des catégories

Définition 3.1 Catégorie du produit/Product Category. *Le* ***produit de deux catégories C*** *et* ***D****, dénoté* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$*, ont les objets dont le forme est* (A, B) *où* $A \in \mathbf{C}$ *et* $B \in \mathbf{D}$*, ses morphismes sont* $(f, g) : (A, A') \to (B, B')$ *où* $f : A \to B \in \mathbf{C}$ *et* $g : A' \to B' \in \mathbf{D}$*. Nous avons aussi:*

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$
$$1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

Et il y a deux foncteurs de projection $\pi_1(C, D) = C$ *et* $\pi_2(C, D) = D$*.*

Définition 3.2 Catégorie duale/Dual Category. *Le* ***catégorie duale*** $\mathbf{C}^{op}$ *est une catégorie qui a les mêmes objets que* $\mathbf{C}$*, avec tous ses morphismes inversés, id est., si* $f : A \to B \in \mathbf{C}$*, alors* $f^* : B^* \to A^* \in \mathbf{C}^{op}$[13]*. Alors nous avons, évidemment:*

$$1_{C^*} = (1_C)^*$$
$$f^* \circ g^* = (f \circ g)^*$$

Similairement, tous les diagrammes de $\mathbf{C}$ *restent les même dans* $\mathbf{D}$*, sauf que leurs directions sont inversées.*

Définition 3.3 Slice Category. [14] *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie et* $A \in \mathbf{C}$*, une* ***catégorie des objets au-dessus de*** A *(ou en anglais, "****Slice Category****"), écrit en* $\mathbf{C}/A$*, est une catégorie telle que:*

- *Ses objets sont tous les morphismes* $f : X \to A \in \mathbf{C}$ *pour certains* $X \in \mathbf{C}$*, ou également, tous les morphismes* $f \in \mathbf{C}$ *tels que* $\mathrm{cod}(f) = A$*.*[15]
- *Pour chaque deux objets* $f : X \to A, g : X' \to A \in \mathbf{C}/A$*, un morphisme* $\alpha : X \to X' \in \mathbf{C}$ *tel que* $g \circ \alpha = f$*. id est.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3. Catégorie des objets au-dessus de A

C'est plutôt évident que l'identité de $\mathbf{C}/A$ est juste l'identité de $\mathbf{C}$, la composition et ses propriétés sont pourvus[16] par la composition dans $\mathbf{C}$.

---

[13] Nous utilisons l'étoile $*$ pour distinguer les objets et les fonctions de **C** des objets et les fonctions de **D**.
[14] Malheureusement je ne puis pas trouver la traduction de "Slice Category" en français.
[15] Remarquez que ces sont les morphismes de la catégorie originale **C**.
[16] *pourvoir* provide

Exemple 3.4. *Nous pouvons en fait donner un exemple pour une définition aussi obscure, soit P une poset, et* ***P*** *une catégorie au-dessus de la relation d'ordre sur P telle que $f : a \to b = (a, b) \in P \times P$ si et seulement si $a \leqslant b$, autrement $\varnothing$; pareillement, nous définissons $g \circ f : a \to c$ comme (a, c) où $f : a \to b$ et $g : b \to c$. C'est facile à verifier que c'est vraiment une catégorie*[17]*. Alors $[-\infty, b]$ pour un $b \in P$ arbitraire est une catégorie des objets au-dessus de a: Pour chaque $a, a' \leqslant b$ tel que $a \leqslant a'$ et $f : a \to b, f' : a' \to b$, nous avons:*

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & a' \arrow[dl, "f'"] \\
& b &
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 4. Catégorie des objets de **P** au-dessus de a

Et α est exactement un morphisme de ***P****: Si $a = a'$, alors $\alpha : a \to a = (a, a)$ est une identité, autrement $\alpha : a \to a' = (a, a')$, dans les deux cas nous pouvons voir que $f \circ \alpha = f$ par définition, car la relation d'ordre partiel est transitive.*

Remarque 3.5. *Remarquez qu'il y a une* foncteur oublieuse *$F : \mathbf{C}/A \to \mathbf{C}$ qui "oubliera" l'objet A in $\mathbf{C}/A$, défini par:*

- *Pour le objet $f : X \to A$ de $\mathbf{C}/A$, $F(f) = X$.*
- *Pour les objets $O : X \to A, P : X' \to A$ et le morphisme $a : O \to P$ de $\mathbf{C}/A$, $F(a : O \to P) = a$.*

Remarquez que $a : O \to P$ est essentiellement un morphisme $a : X \to X'$ dans ***C****. C'est facile à verifier que c'est vraiment une foncteur: $F(a : O \to P) = a : X \to X' = F(O : X \to A) \to F(O : X' \to A)$, l'identité et la composition sont pourvues par* ***C*** *(les morphismes dans $\mathbf{C}/A$ est en fait les morphismes dans* ***C****, alors évidemment celles-là sont préservées étant donné le fait que $F(a) = a$).*

Remarque 3.6. *Remarquez que si* ***C*** *une catégorie et $g : C \to D$ un morphisme de* ***C****, alors il y a une foncteur $u : \mathbf{C}/C \to \mathbf{C}/D$. Et vous pouvez remarquer que $\mathbf{C}/x : \mathbf{C} \to$* ***Cats*** *est elle-même une foncteur, dans laquelle* ***Cats*** *est la catégorie des catégories petites.*

Définition 3.7 Coslice Category. *Soit* ***C*** *une catégorie et $A \in \mathbf{C}$, la* ***catégorie des objets au-dessous de*** *A (ou* ***coslice category*** *en anglais), dénoté $A/\mathbf{C}$, est une catégorie dont les objets sont tous les morphismes $f \in \mathbf{C}$ tels que $\mathrm{dom}(f) = A$, les morphismes de $A/\mathbf{C}$ est le morphisme $\alpha_{\mathbf{C}} : X \to X'$*[18] *tel que si $f_{A/\mathbf{C}} : A \to X$ et $g_{A/\mathbf{C}} : A \to X'$, alors $\alpha_{\mathbf{C}} \circ f_{A/\mathbf{C}} = g$.*

Exemple 3.8 Ensemble Pointé. *La catégorie* **Sets**$_*$ *des ensembles pointés est isomorphe à $1/$**Sets** de la catégorie des objets de* **Sets** *au-dessous du singleton $1 = \{*\}$. C'est vrai que nous pouvons définir une foncteur F :* **Sets** *$\to 1/$**Sets** entre elles comme:*

- *$F((A, a)) = f : 1 \to A$ telles que $f(*) = a$.*
- *$F(f : (A, a) \to (B, b)) = f : A \to B$.*

*Premièrement, remarquez que un morphismes $f : 1 \to A$ de $1/$**Sets** est isomorphe à un objet (A, a) de* **Sets**$_*$*, dans lequel $f(*) = a$ (car $\{*\}$ a seulement un élément). Maintenant voyons comment leurs morphismes coïncident: soit $f : 1 \to A \cong (A, a)$ et $g : 1 \to B \cong (B, b)$, le moprhisme entre eux dans $1/$**Sets** est une fonction des ensembles $h_{1/\mathbf{Sets}} : A \to B$ tel que $h_{1/\mathbf{Sets}} \circ f = g$, car les seul résultats possibles de f et g sont a et b, alors $h_{1/\mathbf{Sets}} \circ f = g$ est ainsi $h_{1/\mathbf{Sets}}(a) = g(a) = b$. id est. $h_{1/\mathbf{Sets}}$ préserve le point fondamental a de (A, a), alors les morphismes de $1/$**Sets** est aussi isomorphes à ceux de* **Sets**$_*$.

[17] La définition des catégories si évidentes comme celle-ci sera omise.

[18] Nous utilisons $\alpha_{\mathbf{C}}$ pour monterer que c'est un morphismes de **C**.

Soit M un monoïde, nous utilisons $|M|$ pour répresenter l'ensemble sous-jacent[19] de M. Alors nous avons la définition suivante pour le monoïde libre.

Définition 4.1 Free Monoid/Monoïde Libre. *Un **monoïde libre** $M(A)$ au-dessus d'un ensemble A est un monoïde avec la propriété suivante: Il y a une fonction d'inclusion $\iota : A \to M(A)$ telle que pour un monoïde arbitraire N et une fonction arbitraire $f : A \to |N|$, il y ait un homomorphisme monoïde unique $\bar{f} : M(A) \to N$ tel que $|\bar{f}| \circ \iota = f$ (la signification de $|\bar{f}|$ devrait être auto-explicatif).*

Cette définition est assez obscure, et honnêtement, vous pouvez difficilement saisir tout point[20] des monoïdes libres rien qu'en[21] la regardant, le livre ne le explique pas non plus. Intuitionnistement, un monoïde M libre au-dessus un ensemble A est un monoïde tel que:

(1) *"Sans ordures[22]."* Tous ses éléments peuvent être écrits en $a_1 \cdot_M ... \cdot_M a_i$ dans lequel $a_1, ..., a_i \in A$, ***id est.***, il y a un ensemble A qui génére tout M.
(2) *"Sans bruit[23]."* Dans M il n'y a pas de relations non triviales, une relation est non triviale s'il n'est pas déterminé par la définition du monoïde. Par exemple, si u est l'identité de M, alors $w \cdot_M u = u$ est une relation triviale, mais $p \cdot_M q = u$ ne l'est pas, car vous ne pouvez pas le déduit des définitions du monoïde.

Le mot *libre* généralise la définition de la *base*, ce qui est un ensemble qui peut être utilisé pour générer des plus grandes structures comme *monoïde* et *espace topologie*. Les avantages de la base est que vous pouvez définir les opérations sur $M(A)$ en les définissant sur A, et prouver des propriétés de $M(A)$ en les prouvant sur A. Alors, qu'est-ce que la relation entre cette intuition et notre définition formelle?

(1) Premièrement. Nous allons expliquer comment notre définition implique "sans ordures". Cela corresponds à la unicité de notre définition formelle. Supposons que l'homomorphisme $\bar{f}$ ne soit pas unique, alors il y ait un autre morphisme $g : A^* \to N$ tel que $g \circ \iota = f$ et $g \neq \bar{f}$, remarquez que $g \circ \iota = f$ signifie $g(a) = \bar{f}(a)$ pour tout $a \in A$, car le domaine de ι est A, mais cela signifie aussi que $g(a')$ et $f(a')$ peuvent être en désaccord[24] sur $a' \in A^* \backslash A$. Maintenant supposons qu'il y ait un $a_p a_q \in A^* \backslash A$ (nous abrègeons $a_p \cdot_M a_q$ en $a_p a_q$) tel que $g(a_p a_q) \neq \bar{f}(a_p a_q)$, puisque[25] tous les deux sont des homomorphismes monoïdes, nous avons $g(a_p a_q) = g(a_p) \cdot_N g(a_q) \neq \bar{f}(a_p) \cdot_N \bar{f}(a_q) = \bar{f}(a_p a_q)$, disons ***sans restreindre la généralité*** que $\bar{f}(a_p) \neq g(a_p)$ et cela indique $a_p \notin A$, alors $a_p a_q$ n'est pas généré par A. L'autre direction est similaire.
(2) Ensuite. nous allons montrer comment notre définition implique "sans bruit". Cela correspond à l'existence de notre définition formelle. Pour prouver $\Leftarrow$, supposons qu'il n'y ait pas de relations non triviales, nous pouvons définir $\bar{f} : a^* \to N$ sur A, alors soit $\bar{f}(a_1 ... a_i) = \bar{f}(a_1) \cdot_N ... \cdot_N \bar{f}(a_i)$, et c'est la fonction que nous voulons. Pour $\Rightarrow$ nous allons la prouver par *reductio ad absurdum*, supposons qu'il y ait des relations non triviales $a_p a_q = a_c$, et supposons qu'il y ait un tel homomorphism $\bar{f}$, alors $\bar{f}(a_p a_q) = \bar{f}(a_c)$ et $\bar{f}(a_c)$ n'est pas nécessairement égal à $\bar{f}(a_p) \cdot_N \bar{f}(a_q)$, car N est un monoïde arbitraire et nons ne pouvons pas présumer que cette relation tient aussi dans N, mais cela contredit la supposition que f est un homomorphisme monoïde.

Préposition 4.2. *Les monoïdes libres sont uniques à isomorphisme près: Étant donné deux monoïdes M et N au-dessus de A avec les fonctions d'inclusion $i : A \to |M|$, $j : A \to |N|$, alors il y a un isomorphisme monoïde*

[19]*sous-jacent* underlying
[20]*tout + n.* any + n.
[21]*rien que ...* only ...
[22]*ordures* n.f.pl. junk
[23]*bruit* n.m. noise
[24]*être en désaccord ...* disagree
[25]*puisque...* since...

unique $h : M \cong N$ tel que $|h| \circ i = j$ et $|h^{-1}| \circ j = i$ (Remarquez que $|h|$ est une fonction qui oublie la structure monoïde de h).

Définition 4.3 Directed Graph/Graphe Orienté. *Un **graphe orienté** $G = (V, E)$ est deux ensemble: l'ensemble d'arêtes E et l'ensemble d'nœuds V, avec deux fonctions $s : E \to V$ ce qui sélectionne la source d'une arête et $t : E \to B$ ce qui sélectionne sa cible[26]. S'il y a chemin:*

$$v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} ... \xrightarrow{e_n} v_n$$

nous écrivons $v_1 \rightsquigarrow v_n = e_1 ... e_n$.

Remarque 4.4. *C'est plutôt évident que un graphe orienté G génére une catégorie $\boldsymbol{C}(G)$, en prenant ses nœuds comme objets et ses chemins (*id est.*, la combination d'arêtes $e_1 ... e_n$) comme morphismes dans lequels* $\mathrm{dom}(e_1 ... e_n) = s(e_1)$ *et* $\mathrm{cod}(e_1 ... e_n) = t(e_n)$*, l'identité est une arête d'un nœud à lui-même, et la composition est définie comme la concatenation des arêtes: $e_1 ... e_p \circ e_q ... e_2 = e_1 ... e_q e_q ... e_2$.*

Remarque 4.5. *Il y a une foncteur oublieuse F : **Cats** $\to$ **Graphs** dans lequel **Graph** est la catégorie de tous les graphes. Examinez p.21-22 pour une explication détaillée.*

Définition 4.6 Free Category/Catégorie Libre. *Une **catégorie libre** $\boldsymbol{C}(G)$ au-dessus un graphe G est une catégorie qui satisfait la propriété: Il y a un homomorphisme de graphe $i : G \to |\boldsymbol{C}(G)|$ tel que pour une catégorie arbitraire **D** et un homomorphisme de graphe $f : G \to |\boldsymbol{D}|$, il y ait une foncteur unique $h : \boldsymbol{C}(G) \to \boldsymbol{D}$ telle que $|h| \circ i = f$ (Vous devriez comparez cette définition avec celle de monoïde libre).*

5. Taille des catégories

Catégories, comme d'autres collections des objets mathématiques, sont sujets au *paradoxe de Russell.* Alors nous devrions distinguer des tailles différentes.

Définition 5.1 Small Category/Catégorie Petite. *Une catégorie **C** est **petite** si la collection de ses objets et la collection de ses morphismes sont tous les deux ensembles. Autrement, c'est une **grande** catégorie.*

Définition 5.2 Locally small category/Localement petite catégorie. *Une catégorie **C** est **localement petite**, si pour chaque deux objets $A, B \in \boldsymbol{C}$, la collection des morphismes* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ *est un ensemble (ce que nous l'appelons* hom-set*).*

Aussi il y a une définition des catégories concrètes.

Définition 5.3 Concrete Category/Catégorie Concrète. *Une catégorie petite est concrète s'il y a une foncteur injective (nous appelons de telles foncteurs **les foncteurs fidèles**) à* **Sets**. *Remarquez que la notion des catégories concrètes capture l'intuition de catégories qui sont consistent en des ensembles (comme ce que nous pouvons voir dans ces structures algébriques).*

---

[26]*cible* n.f. target